

Принцип максимума Понтрягина

Речь пойдёт о далеко не самой общей постановке задач оптимального управления, в которой *отсутствуют* так называемые *фазовые ограничения* и которую по этой причине мы будем называть *простейшей*. Главной нашей целью будет вывод *необходимых условий оптимальности* в форме известного **Принципа Максимума Понтрягина (ПМП)**. Мы также кратко обсудим и возможную практическую схему применения этого Принципа для решения конкретных задач оптимального управления.

Рассмотрим следующую постановку задачи оптимального управления:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^T f^0(x(t), u(t), t) dt + \varphi(x(T)) \rightarrow \inf, \quad u \in U, \\ x(t) &= x(t; u), \quad x'(t) = f(x(t), u(t), t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0, \\ u \in U &= \{u = u(t) \text{ изм. по Лебегу на } (0, T) \mid u(t) \in V \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $u = u(t)$ – управления, $\dim u = r$, $x = x(y) = x(t; u)$ – соответствующие этим управлениям траектории (решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений из (1)), $\dim x = n$. Значения $T > 0$, $x_0 \in R^n$, множество $V \subset R^r$ и функции $f^0 : R^n \times R^r \times R^1 \rightarrow R^1$, $f : R^n \times R^r \times R^1 \rightarrow R^n$ и $\varphi : R^n \rightarrow R^1$ предполагаются заданными. *Оптимальным управлением* в задаче (1) считается любая функция $u(t)$ из допустимого множества U , доставляющая минимум функционалу $J(u)$.

Вывод необходимых условий оптимальности в форме ПМП будем проводить в рамках следующих предположений (несколько завышенных ради технических упрощений):

$$\begin{aligned} f, f_x, f^0, f_x^0, \varphi, \varphi_x &\text{ непрерывны по } (x, u, t) \text{ и Лип-непрерывны по } (x, u) \\ &\text{с конст. } L > 0, \text{ не зависящей от } x, u, t, \text{ мн-во } V \subset R^r \text{ ограничено.} \end{aligned} \quad (2)$$

Введём функцию Гамильтона-Понтрягина:

$$H(x, u, t, \psi) = 1 \cdot f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle_{R^n} : R^n \times R^r \times R^1 \times R^n \rightarrow R^1. \quad (3)$$

Наша ближайшая цель — получить специальное представление для приращения $\Delta J = J(u + h) - J(u)$ функционала $J(u)$, используя приведённые в (2) требования гладкости и ограниченности, считая, что $u(t)$ и $u(t) + h(t)$ — два

допустимых управления. Введём следующие сокращённые обозначения:

$$\begin{aligned}\Delta f^0 &= f^0(x(t; u + h), u(t) + h(t), t) - f^0(x(t), u(t), t), \\ \Delta \varphi &= \varphi(x(T; u + h)) - \varphi(x(T; u)), \\ \Delta x &= x(t; u + h) - x(t; u), \\ \Delta f &= f(x(t; u + h), u(t) + h(t), t) - f(x(t), u(t), t), \\ \Delta H &= 1 \cdot \Delta f^0 + \langle \psi, \Delta f \rangle_{R^n}.\end{aligned}$$

В этих терминах приращение функционала записывается в виде

$$\Delta J = \int_0^T \Delta f^0 dt + \Delta \varphi. \quad (4)$$

С учётом условий (2) и формулы конечных приращений имеем

$$\Delta \varphi = \langle \varphi_x(x(T) + \theta \Delta x(T)), \Delta x(T) \rangle_{R^n} = \langle \varphi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle_{R^n} + \mathcal{R}_\varphi,$$

где $\theta \in [0, 1]$,

$$\mathcal{R}_\varphi = \langle \varphi_x(x(T) + \theta \Delta x(T)) - \varphi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle_{R^n}, \quad (5)$$

и переписываем равенство (4) в виде

$$\Delta J = \int_0^T \Delta f^0 dt + \langle \varphi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle_{R^n} + \mathcal{R}_\varphi. \quad (6)$$

Введём функцию $\psi(t) : R^1 \rightarrow R^n$ и потребуем, чтобы

$$\psi(T) = \varphi_x(x(T)). \quad (7)$$

Преобразуем скалярное произведение $\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle &\stackrel{\Delta x(0)=0}{=} \langle \psi(T), \Delta x(T) \rangle - \langle \psi(0), \Delta x(0) \rangle \stackrel{\text{H-Л}}{=} \\ &= \int_0^T \langle \psi(t), \Delta x(t) \rangle'_t dt = \int_0^T (\langle \psi'(t), \Delta x(t) \rangle + \langle \psi(t), \Delta x'(t) \rangle) dt = \\ &= [\Delta x'(t) \stackrel{(1)}{=} \Delta f] = \int_0^T (\langle \psi'(t), \Delta x(t) \rangle + \langle \psi(t), \Delta f \rangle) dt\end{aligned}$$

и перепишем (6):

$$\Delta J = \int_0^T \Delta H dt + \int_0^T \langle \psi'(t), \Delta x(t) \rangle dt + \mathcal{R}_\varphi. \quad (8)$$

Теперь преобразуем приращение функции Гамильтона-Понтрягина:

$$\Delta H = \langle H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle_{R^n} + \Delta_u H(t) + \mathcal{R}_H(t),$$

где

$$\Delta_u H(t) = H(x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)) - H(x(t), u(t), t, \psi(t)), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_H(t) &= \\ &= \langle H_x(x(t) + \theta(t)\Delta x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)) - H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle \end{aligned} \quad (10)$$

и $\theta(t) \in [0, 1]$. С учётом (9) и (10) запишем (8) в виде

$$\Delta J = \int_0^T \Delta_u H dt + \int_0^T \langle \psi'(t) + H_x, \Delta x(t) \rangle dt + \int_0^T \mathcal{R}_H(t) dt + \mathcal{R}_\varphi. \quad (11)$$

Потребуем, чтобы в дополнение к (7) функция $\psi(t)$ являлась решением дифференциального уравнения

$$\psi'(t) = -H_x(x(t), u(t), t), \quad 0 < t < T. \quad (12)$$

Тогда в (11) исчезнет второй интеграл и формула приращения примет вид

$$\Delta J = \int_0^T \Delta_u H dt + \int_0^T \mathcal{R}_H(t) dt + \mathcal{R}_\varphi. \quad (13)$$

Оценим в (13) оба остаточных члена $\int_0^T \mathcal{R}_H(t) dt$ и $\mathcal{R}_\varphi$. При этом решающую роль будет играть оценка для приращения траектории $\Delta x(t)$ через приращение управления $h(t)$. Запишем задачу Коши для $\Delta x(t)$ в интегральной форме:

$$\Delta x(t) = \int_0^t \Delta f(s) ds, \quad t \in [0, T]$$

и перейдём к оценке по норме:

$$\begin{aligned} |\Delta x(t)|_{R^n} &= \left| \int_0^t \Delta f(s) ds \right|_{R^n} \leq \int_0^t |\Delta f(s)|_{R^n} ds \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\leq L \int_0^t (|\Delta x(s)|_{R^n} + |h(s)|_{R^r}) ds \leq L \int_0^t |\Delta x(s)|_{R^n} ds + L \int_0^t |h(s)|_{R^r} ds = \\ &= L \int_0^t |\Delta x(s)|_{R^n} ds + L \|h\|_{L^1(0,T)}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

К этому неравенству применима лемма Гронуолла-Беллмана, с помощью которой получается важная оценка

$$|\Delta x(t)|_{R^n} \leq L \|h\|_{L^1(0,T)} e^{Lt} \leq C \|h\|_{L^1(0,T)} \quad \forall t \in [0, T] \quad (C = L e^{LT} > 0). \quad (14)$$

С помощью (14) оцениваем остаточный член $\mathcal{R}_\varphi$ из (5):

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_\varphi| &= |\langle \varphi_x(x(T) + \theta \Delta x(T)) - \varphi_x(x(T)), \Delta x(T) \rangle_{R^n}| \leq \\ &\leq |\varphi_x(x(T) + \theta \Delta x(T)) - \varphi_x(x(T))|_{R^n} |\Delta x(T)|_{R^n} \leq \\ &\stackrel{(2)}{\leq} L \theta |\Delta x(T)|_{R^n}^2 \stackrel{\theta \leq 1}{\leq} L |\Delta x(T)|_{R^n}^2 \stackrel{(14)}{=} \mathcal{O}(\|h\|_{L^1}^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Аналогично оценивается и интегральный остаточный член в (13):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \mathcal{R}_H(t) dt \right| &= \left| \int_0^T \langle H_x(x(t) + \theta(t)\Delta x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)) - \right. \\ &\quad \left. - H_x(x(t), u(t), t, \psi(t)), \Delta x(t) \rangle dt \right| \leq [H \stackrel{(3)}{=} 1 \cdot f^0 + \langle \psi, f \rangle] \stackrel{(2)}{\leq} \\ &\leq L \int_0^T (|\theta(t)\Delta x(t)|_{R^n} + |h(t)|_{R^r}) (1 + |\psi(t)|_{R^n}) |\Delta x(t)|_{R^n} dt. \end{aligned}$$

Для продолжения данной оценки учтём, что функция $\psi(t)$ является непрерывным на $[0, T]$ решением сопряжённой задачи Коши (7), (12), следовательно, она ограничена на $[0, T]$: $|\psi(t)|_{R^n} \leq C_\psi = \text{const} > 0$. Принимая во внимание ограниченность функции $\theta(t) \in [0, 1]$ и полученную равномерную по $t \in [0, T]$ оценку (14), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \mathcal{R}_H(t) dt \right| &\leq \\ L(1 + C_\psi)T \max_{t \in [0, T]} |\Delta x(t)|_{R^n}^2 + L(1 + C_\psi)T \max_{t \in [0, T]} |\Delta x(t)|_{R^n} \int_0^T |h(t)|_{R^r} dt &= \\ = \mathcal{O}(\|h\|_{L^1}^2) + \mathcal{O}(\|h\|_{L^1}) \|h\|_{L^1} = \mathcal{O}(\|h\|_{L^1}^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Оценки остатков (15), (16) позволяют переписать представление для приращения функционала (13) в виде

$$\Delta J = \int_0^T \Delta_u H dt + \mathcal{O}(\|h\|_{L^1}^2). \quad (17)$$

Это и есть окончательный вариант формулы приращения функционала, из которого получаются как соотношения принципа максимума Понтрягина, так и формула градиента $J'(u)$ при наличии дополнительных к (2) свойств гладкости исходных данных по u .

Теорема 30. (принцип максимума Л. С. Понтрягина) Пусть в задаче (1) выполняются условия (2) и пусть $u(t)$ – оптимальное управление, $x(t) = x(t; u)$ – соответствующая ему оптимальная траектория, а $\psi(t)$ – решение задачи Коши (7), (12). Тогда

$$H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \min_{v \in V} H(x(t), v, t, \psi(t)) \quad \text{для п. в. } t \in (0, T). \quad (18)$$

Замечание. Утверждение, получившее мировую известность под названием «принцип максимума», записано в теореме 30 в форме *принципа минимума*. Это было сделано сознательно, т. к. в задаче (1) *на минимум* естественнее записывать необходимое условие оптимальности в форме *принципа минимума*, а не максимума. Посмотрите, например, на формулировку теоремы 25 о необходимых условиях оптимальности для выпуклых задач. У самого Л. С. Понтрягина получился принцип максимума, а не минимума из-за того, что он, во-первых, использовал функцию Гамильтона(-Понтрягина)

$$H(x, u, t, \psi) = (-1) \cdot f^0(x, u, t) + \langle \psi, f(x, u, t) \rangle_{R^n},$$

отличающуюся от (3) знаком при f^0 , и, во-вторых, конечное условие для функции $\psi(t)$ при $t = T$ также было взято с противоположным по сравнению с (7) знаком:

$$\psi(T) = -\varphi_x(x(T)).$$

Доказательство теоремы 30. Отправимся от полученной нами формулы приращения (17) полагая, что управление $u(t)$ оптимально, а управление $u(t) + h(t)$ допустимо. Применим классическую процедуру *игольчатого варьирования* (Макшейна). Именно, фиксируем произвольную точку $t \in (0, T)$ и найдём такое достаточно малое $\varepsilon_t > 0$, чтобы $(t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t) \subset (0, T)$. Понятно, что тогда для всех ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_t$ вложение $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subset (0, T)$, разумеется, также будет выполнено. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t]$, произвольную точку $v \in V$ и рассмотрим следующую функцию, которую обычно называют *игольчатой вариацией управления* $u(t)$:

$$u_\varepsilon(s) = \begin{cases} u(s), & s \in (0, T) \setminus (t - \varepsilon, t + \varepsilon), \\ v, & s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon). \end{cases} \quad (19)$$

Обратим внимание на то, что такая функция $u_\varepsilon(s)$ будет *допустимой* в задаче (1) для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t]$ и любых $v \in V$, поскольку она измерима по Лебегу на $(0, T)$ и для п. в. $s \in (0, T)$ принимает значения из множества V . Оценим норму разности

$$h_\varepsilon(s) = u_\varepsilon(s) - u(s) = \begin{cases} 0, & s \in (0, T) \setminus (t - \varepsilon, t + \varepsilon), \\ v - u(s), & s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon), \end{cases}$$

между оптимальным управлением $u(t)$ и его игольчатой вариацией. При оценивании учтём затребованную в условии (2) ограниченность множества V , считая, что $|v|_{R^r} \leq C_V = \text{const} > 0$:

$$\|h\|_{L^1} = \int_0^T |h_\varepsilon(s)|_{R^r} ds = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |v - u(s)|_{R^r} ds \leq 2C_V \cdot 2\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

В результате из (17) с учётом того, что управление u оптимальное, а управление u_ε допустимое, получим неравенство, справедливое для почти всех $t \in (0, T)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t]$, $v \in V$:

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon) - J(u) &= \int_0^T \Delta_u H(s) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \stackrel{(9)}{=} \\ &= \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(H(x(s), v, s, \psi(s)) - H(x(s), u(s), s, \psi(s)) \right) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

После деления обеих частей (20) на 2ε устремляем $\varepsilon \rightarrow +0$ и, пользуясь теоремой о «дифференцировании интеграла Лебега» (см. [КФ], гл. VI, § 3), по которой

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \Delta_u H(s) ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \Delta_u H(t) \quad \text{для п. в. } t \in (0, T),$$

получаем поточечное неравенство

$$H(x(t), v, t, \psi(t)) - H(x(t), u(t), t, \psi(t)) \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \text{для п. в. } t \in (0, T),$$

т. е. утверждение (18) справедливо и теорема 30 доказана.

О схеме применения Принципа Максимума

Основной смысл соотношений (18) заключается в том, что при поиске оптимального решения задачи минимизации (1) в *бесконечномерном* функциональном пространстве на множестве U они позволяют перейти к поиску оптимальных решений семейства *конечномерных* задач минимизации функции Гамильтона-Понтрягина по переменной v на множестве $V \subset R^r$, и эти конечномерные задачи зависят от параметра $t \in (0, T)$. Преимущества такого перехода не бесспорны, т. к. условия оптимальности (18) лишь *необходимые*, а конечномерных задач *бесконечно много*, но польза (и теоретическая и практическая) от него безусловно есть.

Предположим, что нам удалось аналитически найти минимизаторы функции Гамильтона-Понтрягина:

$$u(t, x, \psi) = \arg \min_{v \in V} H(x, v, t, \psi), \quad (t, x, \psi) \in (0, T) \times R^n \times R^n. \quad (21)$$

Тогда с помощью $u(t, x, \psi)$ можно объединить задачи Коши для $x(t)$ и $\psi(t)$ в единую систему из $2n$ дифференциальных уравнений с $2n$ дополнительными

условиями:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, u(t, x, \psi), t), & t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, \\ \psi'(t) = -H_x(x, u(t, x, \psi), t, \psi), & t \in (0, T), \\ \psi(T) = \varphi_x(x(T)). \end{cases} \quad (22)$$

Задачу (22) принято называть *краевой задачей принципа максимума*. По сравнению с задачами Коши, в которых все дополнительные условия задаются в одной и той же точке, краевые задачи для тех же самых дифференциальных уравнений, как правило, гораздо сложнее поддаются и теоретическим исследованиям и численному решению. Не следует также забывать и о том, что поскольку условия (18) *лишь необходимы* для оптимальности, то даже если нам удаётся решить краевую задачу принципа максимума (22) и найти пару функций $x(t)$ и $\psi(t)$, то полученная с их участием суперпозиция

$$u(t) = u(t, x(t), \psi(t)), \quad t \in (0, T),$$

останется лишь *управлением, подозрительным на оптимальность*, и для проверки его на оптимальность, вообще говоря, потребуются дополнительные усилия.

Приведём пример задачи оптимального управления, которую можно решить аналитически с помощью ПМП (в читаемом параллельно курсу «Оптимальное управление» таких примеров, по-видимому, было много).

Пример. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_0^4 (x(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf, \\ x'(t) &= u(t), \quad 0 < t < 4, \quad x(0) = 0, \\ u &\in U = \{u = u(t) \text{ измер. на } (0, T) \mid |u(t)| \leq 1 \text{ для п.в. } t \in (0, 4)\}. \end{aligned}$$

Здесь $T = 4$, $x_0 = 0$, $\dim x = \dim u = 1$, $f^0 = x + u^2$, $\varphi = 0$, $f = u$, $H = x + u^2 + \psi u$, $V = [-1, 1]$. Сопряжённая система в данном случае имеет вид

$$\psi'(t) = -H_x = -1, \quad 0 < t < 4, \quad \psi(4) = \varphi_x = 0,$$

и её решение легко находится: $\psi(t) = 4 - t$. Минимизатор $u(t, x, \psi)$ функции Гамильтона-Понтрягина здесь тоже легко найти:

$$u(t, x, \psi) = \arg \min_{|v| \leq 1} (x + v^2 + \psi v) = \arg \min_{|v| \leq 1} (v^2 + \psi v) = \arg \min_{|v| \leq 1} (v^2 + (4 - t) v).$$

Вершина параболы $g(v) = v^2 + (4 - t)v$ находится в точке $v_b = \frac{t}{2} - 2$ и точка $u(t)$ минимума функции $g(v)$ на отрезке $[-1, 1]$ будет зависеть от t :

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 2), \\ \frac{t}{2} - 2, & t \in [2, 4]. \end{cases}$$

Найденное управление действительно является оптимальным, поскольку исходную задачу можно рассматривать как задачу минимизации в гильбертовом пространстве $L^2(0, 4)$ *сильно выпуклой* функции $J(u)$ на слабо компактном в $L^2(0, 4)$ «параллелепипеде» U . Как известно, минимум в такой задаче обязательно достигается, причём *оптимальное решение единственно*. Располагая такой информацией, мы с помощью ПМП нашли *единственное* претендующее на оптимальность управление, следовательно, это управление *оптимально*.

Формула градиента. Линеаризованный принцип максимума

Покажем, что если в задаче (1) в дополнение к условиям (2) потребовать, чтобы

$$\exists f_u, f_u^0, \text{ непрерывные по } (x, u, t) \text{ и липшиц-непрерывные по } u, \quad (23)$$

то функционал $J(u)$ будет дифференцируем по Фреше на всём пространстве $L^2(0, T)$. Воспользуемся полученной нами формулой (17) и, с учётом дополнительных требований гладкости (23), с помощью формулы конечных приращений преобразуем выражение, стоящее в (17) под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \Delta_u H(t) &= H(x(t), u(t) + h(t), t, \psi(t)) - H(x(t), u(t), t, \psi(t)) = \\ &= \langle H_u(x(t), u(t) + \theta(t)h(t), t, \psi(t)), h(t) \rangle_{R^r} = \\ &= \langle H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), h(t) \rangle_{R^r} + \mathcal{R}_u(t), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{R}_u(t) = \langle H_u(x(t), u(t) + \theta(t)h(t), t, \psi(t)) - H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), h(t) \rangle_{R^r}.$$

Оценивание интеграла от $\mathcal{R}_u(t)$ проводится аналогично (16) с учётом ограниченности значений $\theta(t) \in [0, 1]$, дополнительных условий (23) и вида производной $H_u = f_u^0 + \psi f_u$:

$$\left| \int_0^T \mathcal{R}_u(t) dt \right| \leq L(1+C_\psi) \int_0^T |h(t)|_{R^r}^2 dt = L(1+C_\psi) \|h\|_{L^2}^2 = \mathcal{O}(\|h\|_{L^2}^2). \quad (24)$$

Поскольку мы выполняем дифференцирование в гильбертовом пространстве $L^2 = L^2(0, T)$, нам будет удобнее загрузить и ту оценку остаточных членов, которая представлена в (17):

$$\|h\|_{L^1}^2 = \left(\int_0^T |h(t)|_{R^r} dt \right)^2 \leq \left(\int_0^T 1^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^T |h(t)|_{R^r}^2 dt \right) = \mathcal{O}(\|h\|_{L^2}^2).$$

В результате при выполнении условий (23) гладкости по u мы можем от (17) перейти к несколько более грубому представлению приращения функционала:

$$J(u + h) - J(u) = \int_0^T \langle H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), h(t) \rangle_{R^r} dt + \mathcal{O}(\|h\|_{L^2}^2), \quad (25)$$

значит, функционал $J(u)$ дифференцируем по Фреше на всём пространстве $L^2(0, T)$ и

$$J'(u) = H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)). \quad (26)$$

Сформулируем полученный результат и его следствие, которое принято называть *линеаризованным принципом максимума*.

Теорема 31. Пусть в задаче (1) выполнены условия (2), а также условия (23). тогда функционал $J(u)$ дифференцируем по Фреше на всём пространстве $L^2(0, T)$ и его градиент вычисляется по правилу (26), где $x(t)$ – решение задачи Коши из (1), а $\psi(t)$ – решение сопряжённой задачи Коши (7), (12). Если $u(t)$ – оптимальное управление в задаче (1), причём множество V выпукло, то для п. в. $t \in (0, T)$ выполняются условия

$$\langle H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), u(t) \rangle_{R^r} = \min_{v \in V} \langle H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), v \rangle_{R^r}. \quad (27)$$

Доказательство. В доказательстве нужны только соотношения (27) линеаризованного принципа максимума, которые, как и в теореме 30, записаны у нас в форме принципа минимума. Опуская подробности, укажем на две возможные схемы рассуждений. Во-первых, можно прийти к (27), отправляясь от известных нам необходимых условий оптимальности, записанных в виде вариационного неравенства

$$\langle J'(u), u_\varepsilon - u \rangle_{L^2} = \int_0^T \langle H_u(x(t), u(t), t, \psi(t)), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle_{R^r} dt \geq 0,$$

а затем использовать ту же технику игольчатого варьирования, что и на завершающем этапе доказательства теоремы 30 при переходе от (20) к (18).

Во-вторых, можно отправиться от уже доказанных соотношений (18) основного принципа максимума и, учитывая, что для п. в. $t \in (0, T)$ оптимальные значения $u(t)$ управлений являются решением оптимизационных задач (18), можно записать те же вариационные неравенства непосредственно для этих конечномерных задач, что возможно в силу наличия условий (23) гладкости по u . В результате получатся искомые условия (27).

Заметим, что в обоих случаях используются необходимые условия оптимальности в форме вариационного неравенства, которые справедливы для гладких функций и выпуклых множеств. Именно по этой причине в условии теоремы 31 появились требования выпуклости ко множеству V допустимых значений управлений. Теорема 31 доказана.

Замечание. Обычный принцип максимума (18) из теоремы 30 является *более сильным* необходимым условием оптимальности по сравнению с линеаризованным принципом максимума (27) из теоремы 31 в том смысле, что каждое управление, которое основной принцип максимума переводит в разряд подозрительных на оптимальность, обязательно попадает в разряд подозреваемых и при применении линеаризованного принципа максимума. В этом легко убедиться, если в теореме 31 проследовать по второму пути доказательства условий (27). Таким образом, основной принцип максимума является «более мелким ситом» при отборе «подозреваемых», т. е. более совершенным инструментом такого отбора.